解题报告 1006

第六题 The Little Architect

本题数据规模很大，n最大可达1000000000，所以一定是某种递推关系，确定系数后通过矩阵快速幂求解，具体求解递推关系系数方法如下:

首先设 F(n)表示n个方格能组成的不同的方案数，F(n)我们现在无法获得有效的递推关系，那么我们可以扩展一维，设F(n, m)表示n个方格并且最下面一层有m个方格的方案总数(n >= m)。这样显然可以得到：

 (1)

同时，对于F(n, m)且 n > m 时考虑除了底层m个方格以外的 (n-m) 个方格的情况，考虑在剩下的 n-m 个方格中，位于最下面的方格有 k 个的情况下，原来最底层的 m 个方格和现在 n-m 个方格最底层的l个方格共有 (m+k-1) 种组合情况，这样可以得到一个二维递推关系：

 (n=m时) (2)

 (n>m时) (3)

但是据此递推关系无法直接推出 F(n) 的递推关系，为了求解此问题，我们构造 F(n) 的生成函数 F(x) 和 F(n, m) 的生成函数 F(x, y),即有：

 (4)

 (5)

由上两式可得F(x) = F(x, 1)，同时构造一个辅助函数，带入F(x, y)定义可得：

 (6)

改变(5)式中m和n的求和顺序可以得到：

 (7)

将(2)式和(3)式共同带入(7)式可得：



也就是：



(8)

在(8)式中令 t = n – m 可得：

 (9)

将(4)式和(6)式带入(9)式可以得到：

 (10)

对(10)式对y求偏导可得：

 (11)

令(10)式和(11)式中的y = 1可得：

 (12)

 (13)

联立(12)和(13)式可以解得：

 (14)

由(14)式可以得出：

+……

+……

+……

+……

将以上4式相加然后与(14)式对应系数相等可以得到：

F(1) = 1

F(2) = 2

F(3) = 6

F(4) = 19

F(n) = 5F(n-1) – 7F(n-2) + 4F(n-3) (n >= 5)

这样就获得了除了前4项以外的关于F(n)的线性递推关系式，通过构造矩阵



通过快速幂即可在log(n)时间内求得除了前四项以外任意一项的结果。

注：本题到目前为止求解递推关系的过程尚没有组合解释，只能通过生成函数，或者可以打前若干项寻找规律，但是找规律时需要注意递推关系对于n=4不成立